INTEGRAIS

(Este material teórico, é um breve resumo do conteúdo de Integrais de funções – possibilita ao aluno um referencial teórico e localiza-o no conteúdo de seu interesse – está em constante atualização. Exemplos resolvidos encontram-se nos vídeos)

INTEGRAL INDEFINIDA

Primitiva de uma função: Uma função $F(x)$ é chamada primitiva de uma função $f(x)$, se para todo x, temos que : $F'(x) = f(x)$.

Exemplos:

i) $F(x) = \frac{x^3}{3}$ é uma primitiva da função $f(x) = x^2$.

ii) As funções $G(x) = \frac{x^3}{3} + 4$, $H(x) = \frac{1}{3}(x^3 + 3)$ também são primitivas da função $f(x) = x^2$, pois $G'(x) = H'(x) = f(x)$

iii) A função $F(x) = \frac{1}{2}sen(2x) + C$, onde C é uma constante, é primitiva da função $f(x) = cos2x$

.: uma mesma função admite mais de uma primitiva.

Seja $F(x)$ uma primitiva da função $f(x)$. Então, se C é uma constante qualquer, a função

$G(x) = F(x) + C$ também é primitiva da $f(x)$;

Se $f'(x)$ se anula em todos os pontos de um intervalo I, então f é constante em I;

Se $F(x)$ e $G(x)$ são funções primitivas de $f(x)$, então existe uma constante C tal que:

$G(x) - F(x) = C$

Definição:

Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, a expressão $F(x) + C$ é chamada de *integral indefinida* da função $f(x)$ e é denotada por:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Propriedades da Integral Indefinida:

O operador integral é um operador linear, ou seja:

i) $\int Kf(x)dx = K\int f(x)dx$, onde K é uma constante qualquer

ii) $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

MUDANÇA DE VARIÁVEL (Método da Substituição)

Sejam $f(x)$ e $F(x)$ duas funções tais que $F'(x) = f(x)$. Suponhamos que $g(x)$ seja outra função derivável, de modo que podemos considerar a função composta de $f(g(x))$.

Temos: $\int f(g(x)).g'(x)dx = F(g(x) + C$ Fazendo $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ e substituindo na primeira equação, tem-se:

$$\int f(g(x)).g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C$$

Na prática, devemos então definir uma função $u = g(x)$ conveniente, de tal forma que a integral obtida seja mais simples.

Integração por Partes

Seja $\int f(x).g(x)dx$, e $f(x)$ e $g(x)$ não tem relação entre si (como no método da substituição), então, efetuam-se escolhas em $f(x)$ e $g(x)$, chamando apropriadamente uma de u e outra de dv. Assim:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Integração através de decomposição em Frações Parciais $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$

Seja $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ uma função racional cujo denominador pode-se escrever na forma fatorada

$$Q(x) = (x - x_1).(x - x_2)...(x - x_n),$$

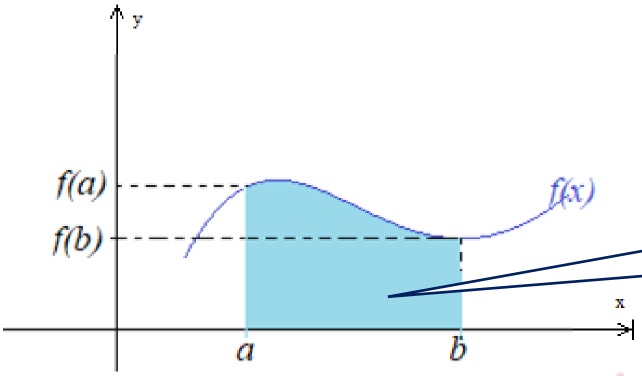
então existem n constantes $C_1, C_2, ...C_n$ tais que:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{C_1}{(x - x_1)} + \frac{C_2}{(x - x_2)} + ... + \frac{C_n}{(x - x_n)}$$, logo:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \left[\frac{C_1}{(x - x_1)} + \frac{C_2}{(x - x_2)} + \cdots + \frac{C_n}{(x - x_n)}\right]dx$$

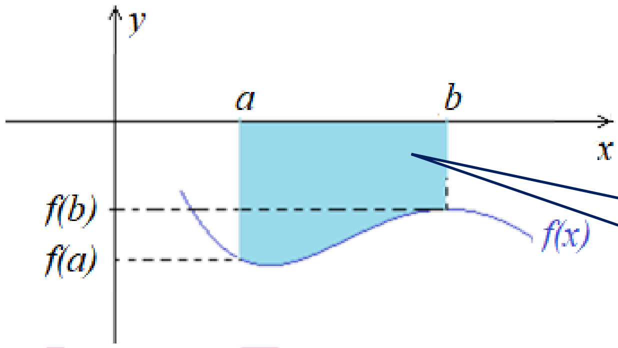
OBS.: deve-se ter atenção aos casos particulares. Quando as raízes de $Q(x)$ tem multiplicidade maior do que 1; Também, quando fatores polinomiais com ordem maior do que 1 ocorrem no denominador.

INTEGRAL DEFINIDA

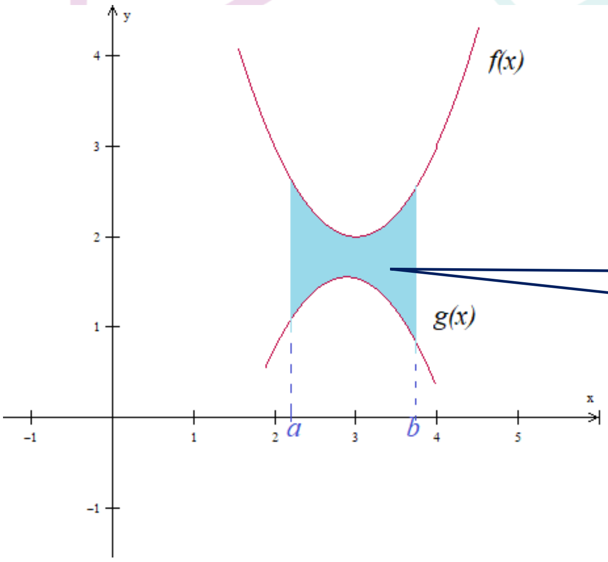


$$A = \int_a^b f(x)dx$$

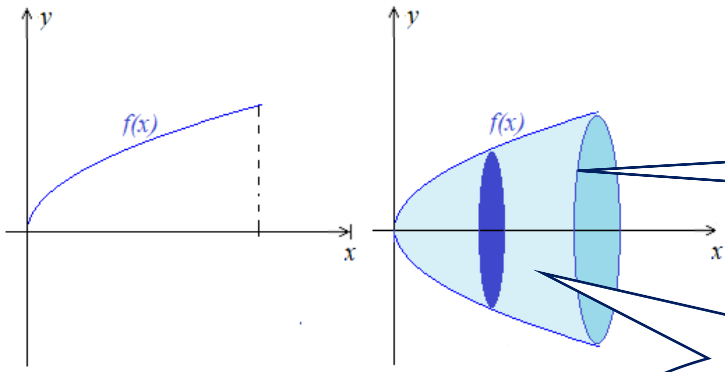
Teorema Fundamental do Cálculo: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$



$$A = -\int_a^b f(x)dx$$

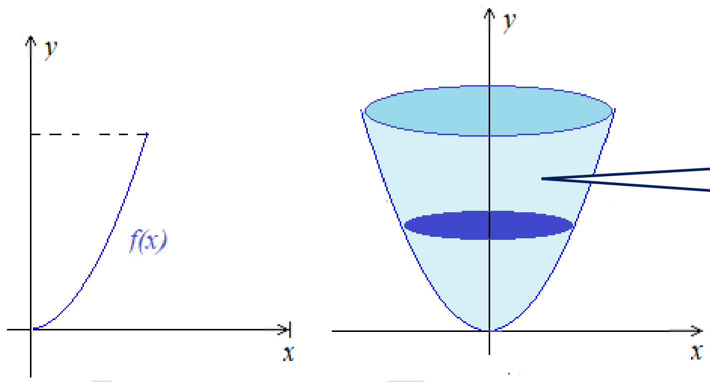


$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

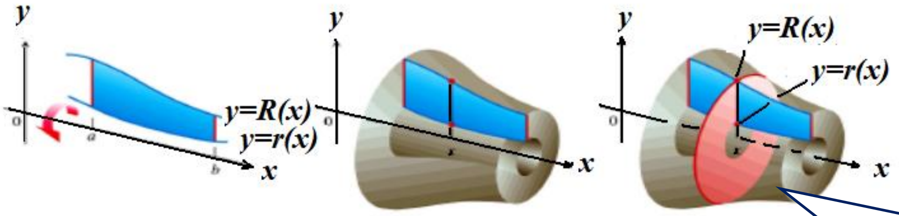


$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$$

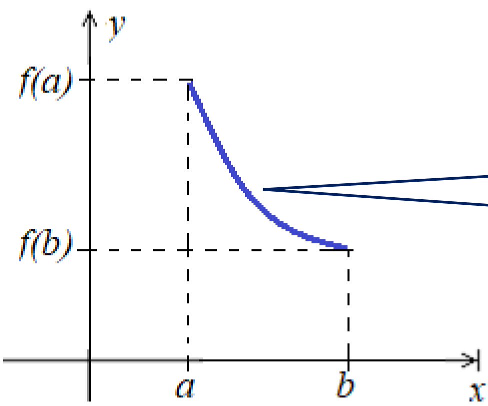
$$A_{superf} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$



$$V = \int_a^b \pi[f(y)]^2 dy$$



$$V = \int_a^b \pi[R(x)^2 - r(x)^2]dy$$



$$ds = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Você encontra exercícios resolvidos sobre Integrais nos vídeos disponibilizados.